Problema cinemático inverso

- El **objetivo** del problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot, $\mathbf{q}=[q_1\ q_2\ ...\ q_n]^T$, para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.
- La resolución no es sistemática: Depende de la configuración del robot y pueden existir soluciones múltiples.
- Debemos intentar conseguir una solución cerrada, es decir, encontrar una relación matemática explícita de la forma:

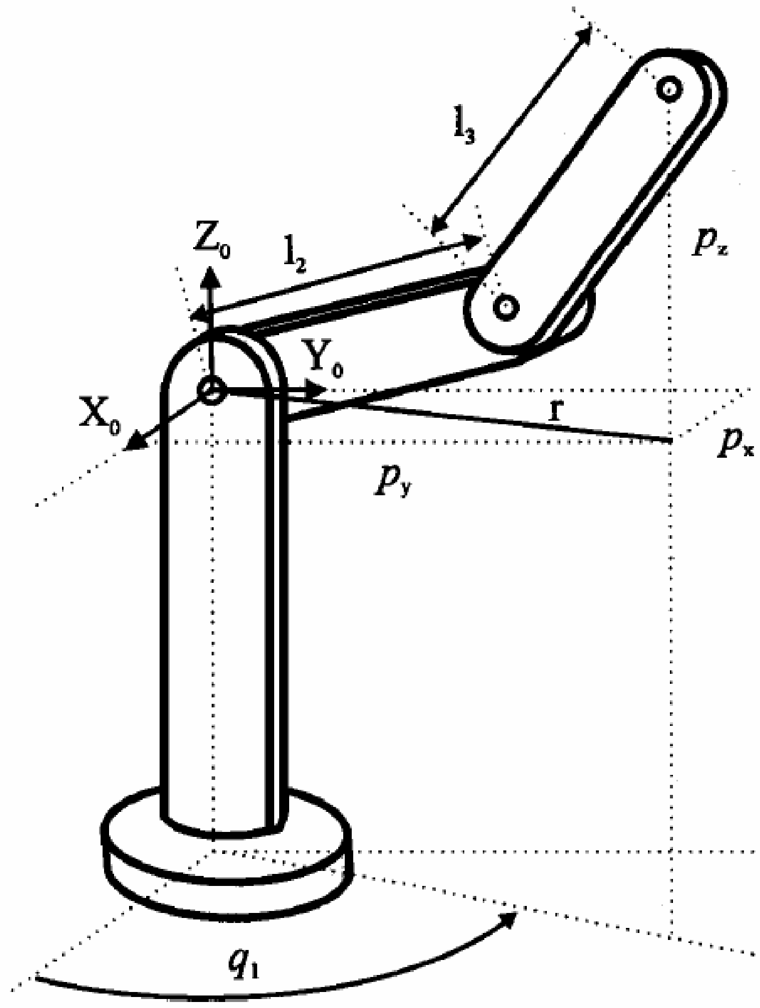
$$q_k = f_k\ (x,y,z,\ \alpha,\ \beta,\gamma)$$
$$k = 1\ldots n\ (\mathrm{GDL})$$

- Este tipo de solución presenta las siguientes ventajas:
  - Posibilidad de resolución en tiempo real (seguimiento de trayectorias).
  - Posibilidad de incluir restricciones que garanticen la mejor solución (por ejemplo, límite en los recorridos articulares).
  - Posibilidad de simplificaciones.
  - Problema: No siempre existe.

Obtención del modelo cinemático inverso

- **Métodos geométricos**:
  - Se suele utilizar para obtener los valores de las primeras variables articulares, que son las que posicionan el robot (prescindiendo de la orientación de su extremo).
  - Utilizan relaciones geométricas y trigonométricas sobre los elementos del robot.
- **Matrices de transformación homogénea**:
  - Despejar las *n* variables q_i en función de las componentes de los vectores **n**, **o**, **a** y **p**.
- **Desacoplo cinemático**:
  - Para determinados robots con 6 grados de libertad.
  - Resolución independiente de los grados de libertad que posicionan y de los que orientan.

Resolución por métodos geométricos (I)



$$\boxed{\mathbf{q_1} = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}$$

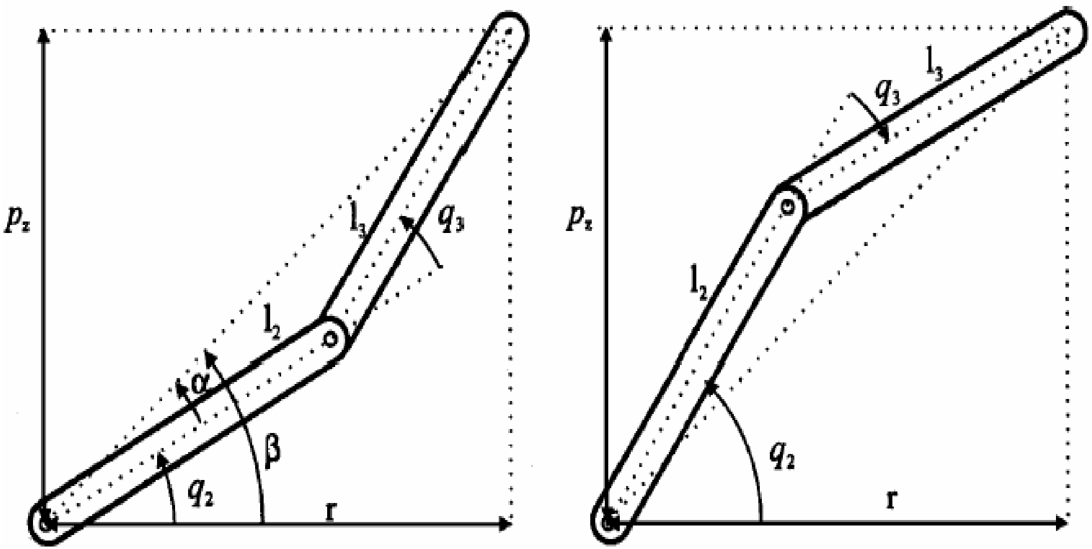
$$\left.\begin{aligned} r^2 &= p_x^2 + p_y^2 \\ r^2 + p_z^2 &= l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos q_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}$$

$$\sin q_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$\boxed{\mathbf{q_3} = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)}$$

Resolución por métodos geométricos (II)



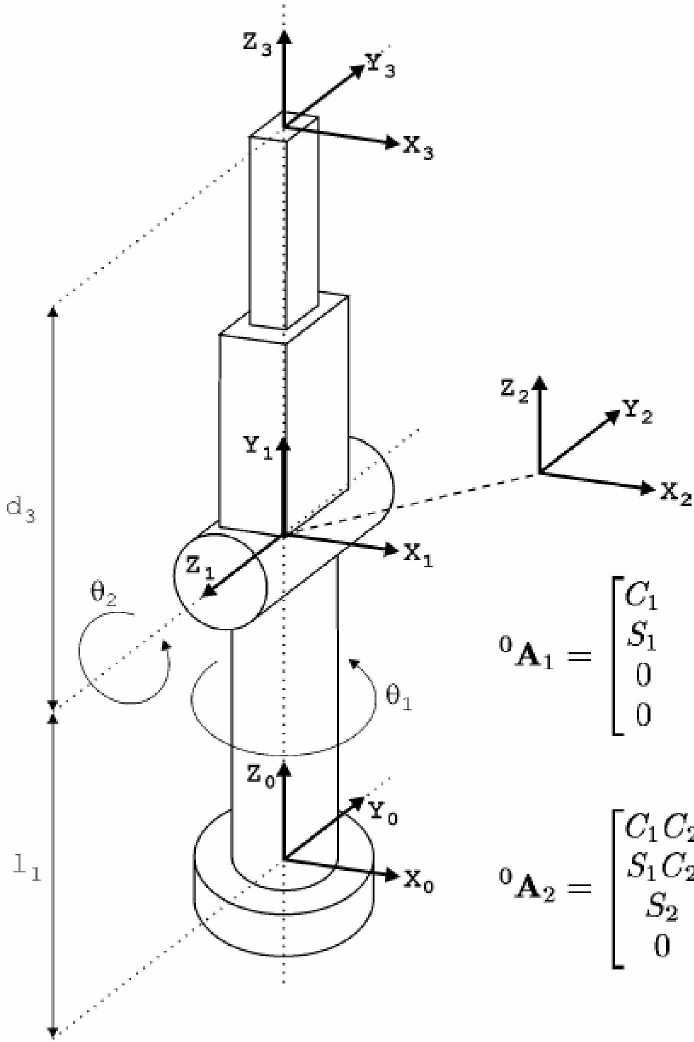
$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{p_z}{r}\right) = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{q_2} = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)}$$

Resolución por matrices de transformación (I)



Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	l_1	0	90
2	θ_2	0	0	-90
3	0	d_3	0	0

$$^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & 0 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & -d_3C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & -d_3S_1S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & d_3C_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolución por matrices de transformación (II)

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1\, {}^1\mathbf{A}_2\, {}^2\mathbf{A}_3$$

$$({}^0\mathbf{A}_1)^{-1}\,\mathbf{T} = {}^1\mathbf{A}_2\, {}^2\mathbf{A}_3$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & -S_2 d_3 \\ S_2 & 0 & C_2 & C_2 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eligiendo el elemento (3,4):

$$S_1 p_x - C_1 p_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_1 = \left(\frac{p_y}{p_x}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\theta_1} = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}$$

Resolución por matrices de transformación (III)

$$({}^{1}\mathbf{A}_2)^{-1}\,({}^{0}\mathbf{A}_1)^{-1}\,\mathbf{T} = {}^{2}\mathbf{A}_3$$

$$\begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_2C_1 & C_2S_1 & S_2 & -l_1S_2 \\ -S_1 & C_1 & 1 & 0 \\ -S_2C_1 & -S_2S_1 & C_2 & -l_1C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eligiendo el elemento (1,4):

$$C_2C_1p_x + C_2S_1p_y + S_2p_z - l_1S_2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\theta_2 = \arctan -\frac{C_1p_x + S_1p_y}{p_z - l_1}}$$

Eligiendo el elemento (3,4):

$$-S_2C_1p_x - S_2S_1p_y + C_2p_z - C_2l_1 = d_3 \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{d_3} = C_2(p_z - l_1) - S_2(C_1p_x + S_1p_y)}$$

Matriz Jacobiana

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c}\text{Velocidad}\\ \text{de las}\\ \text{articulaciones}\\ (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)\end{array}} & \begin{array}{c}\xrightarrow{\textbf{Jacobiana directa}}\\[3em] \xleftarrow[\textbf{Jacobiana inversa}]{}\end{array} & \boxed{\begin{array}{c}\text{Velocidades}\\ \text{del extremo}\\ \text{del robot}\\ (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})\end{array}} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= f_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) \\
\dot{q}_2 &= f_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
\dot{q}_n &= f_n(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f_x(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) \\
\dot{y} &= f_y(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) \\
\dot{z} &= f_z(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) \\
\dot{\alpha} &= f_\alpha(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) \\
\dot{\beta} &= f_\beta(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) \\
\dot{\gamma} &= f_\gamma(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)
\end{aligned}$$

Jacobiana directa

$$x = f_x(q_1, q_2, \dots, q_n) \qquad y = f_y(q_1, q_2, \dots, q_n) \qquad z = f_z(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n) \qquad \beta = f_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n) \qquad \gamma = f_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{y} = \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{z} = \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$\dot{\alpha} = \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{\beta} = \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{\gamma} = \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \qquad \text{con } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \textbf{Matriz Jacobiana}$$

Jacobiana inversa

- **Inversión simbólica de la matriz Jacobiana:**
  - Gran complejidad: matriz 6x6 de funciones trigonométricas.
- **Evaluación e inversión numérica de la matriz Jacobiana:**
  - Necesidad de recómputo continuo.
  - En ocasiones **J** no es cuadrada . Matriz pseudoinversa (**J JT**)-1.
  - En ocasiones el determinante de **J** es nulo: configuraciones singulares.

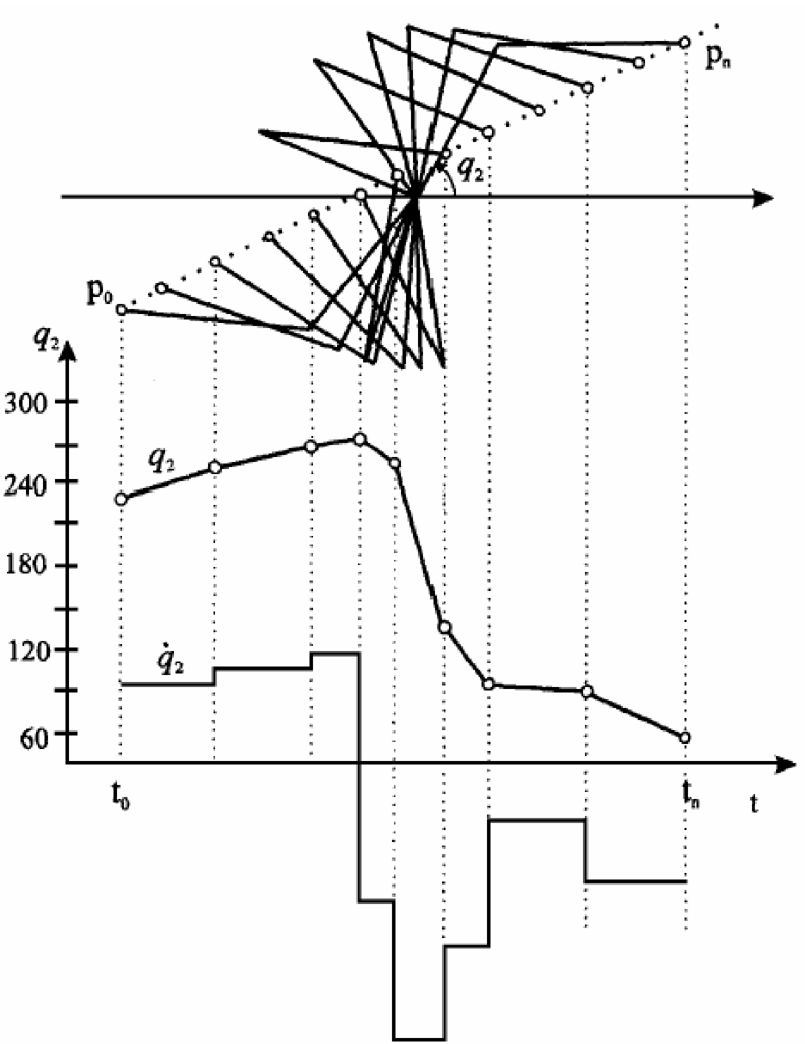
$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \\ &\vdots \\ q_n &= f_n(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \gamma} \end{bmatrix}$$

Configuraciones singulares

- Jacobiano (determinante de la matriz jacobiana) nulo.
- Incremento infinitesinal en coordenadas cartesianas implica incremento infinito en coordenadas articulares.
  - En las inmediaciones de las configuraciones singulares, el pretender que el extremo del robot se mueva a velocidad constante, obligaría a movimientos de las articulaciones a velocidades inabordables por sus actuadores.
- Implica pérdida de algún grado de libertad.
- Tipos de singularidades:
  - En los límites del espacio de trabajo del robot.
    - El extremo se encuentra en algún punto límite de trabajo interior o exterior.
  - En el interior del espacio de trabajo del robot.
    - Alineación de dos o más ejes de las articulaciones del robot.
- Requieren su estudio y eliminación.



- Esta figura muestra el resultado de intentar realizar con un robot tipo SCARA, una trayectoria en línea recta a velocidad constante que pasa por una configuración singular.
- Obsérvese la brusca variación de la velocidad articular $\dot{q}_i$ que crece hasta valores inalcanzables en la práctica