Coordenadas homogéneas

- Una matriz de rotación 3 x 3 no nos da ninguna posibilidad para la traslación y el escalado.
- Introducimos una cuarta coordenada
  - **p**(*x,y,z*) **p**(*wx,wy,wz,w*) , donde *w* tiene un valor arbitrario y representa un factor de escala.
- Vector en coordenadas homogéneas:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ejemplo: 2**i**+3**j**+4**k** $[2,3,4,1]^T = [4,6,8,2]^T = [-6,-9,-12,-3]^T$.
- En general, la representación mediante coordenadas homogéneas de la localización de sólidos en un espacio n-dimensional se realiza a través de coordenadas de un espacio (n+1)-dimensional.

Matriz de transformación homogénea (I)

- Matriz 4x4 que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{p}_{3\times1} \\ \mathbf{f}_{1\times3} & \mathbf{w}_{1\times1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

- En robótica la submatriz $\mathbf{f}_{1x3}$, que representa una transformación de perspectiva, es nula; y la submatriz $\mathbf{w}_{1x1}$, que representa un escalado global, es la unidad:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{p}_{3\times1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que representa la orientación y posición de un sistema OUVW rotado y trasladado con respecto al sistema de referencia OXYZ.

Matriz de transformación homogénea (II)

- Aplicaciones
  - Representar la posición y orientación de un sistema girado y trasladado OUVW, con respecto a un sistema fijo de referencia OXYZ, que es lo mismo que representar una rotación y una traslación realizada sobre un sistema de referencia.

  - **Transformar** un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema OUVW, a su expresión en coordenadas del sistema de referencia OXYZ.

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - **Rotar y trasladar** un vector con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ.

$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación homogénea: Traslación (I)

- Traslación
  - Para un sistema OUVW trasladado únicamente un vector **p** = p_xi + p_yj + p_z**k** con respecto al sistema fijo OXYZ. La matriz homogénea será la matriz básica de traslación:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

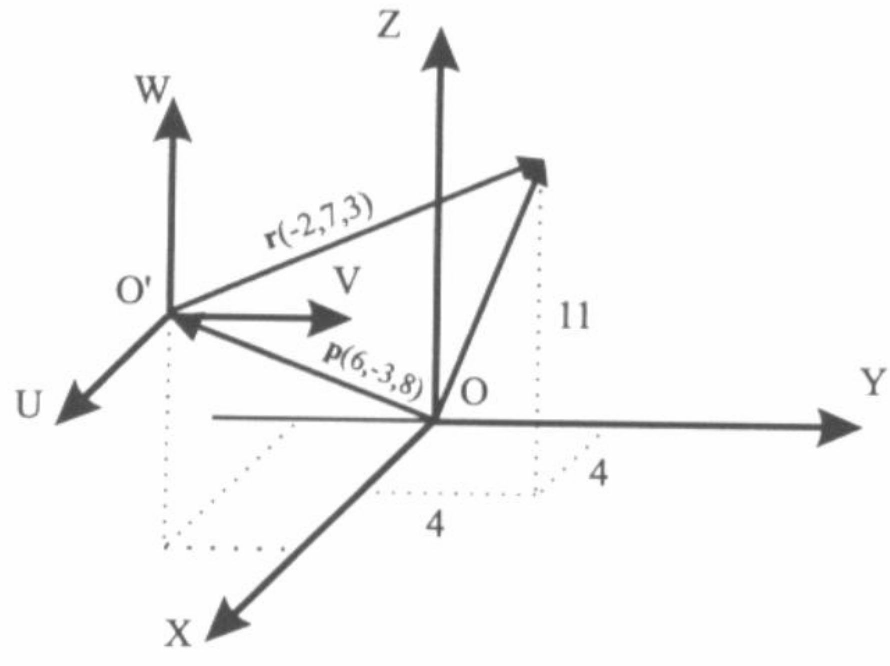
  - Un vector cualquiera r, representado en OUVW por $\mathbf{r}_{uvw}$, tendrá como coordenadas en el sistema OXYZ:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u + p_x \\ r_v + p_y \\ r_w + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación homogénea: Traslación (II)

- Ejemplo 1.
  - Tenemos un sistema O´UVW que está trasladado un vector **p**(6,-3,8) con respecto del sistema OXYZ. Calcular las coordenadas (r_x, r_y, r_z) del vector **r** cuyas coordenadas con respecto al sistema O´UVW son $\mathbf{r}_{uvw}$(-2,7,3).

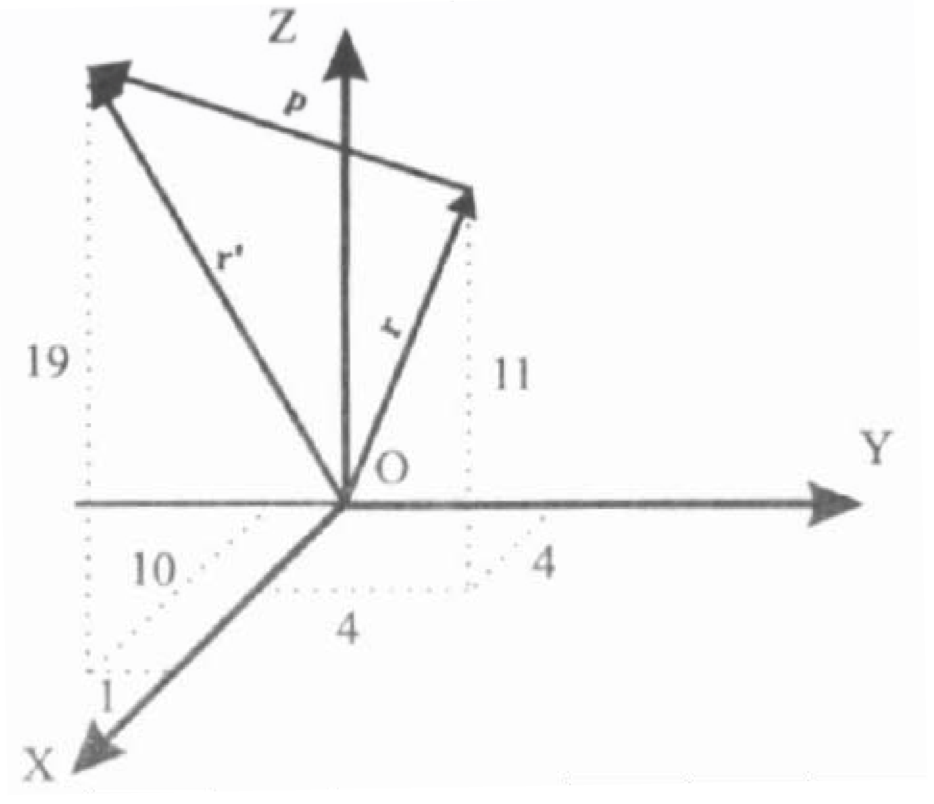
$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Matriz de transformación homogénea: Traslación (III)

- Ejemplo 2.
  - Calcular el vector r'_{xyz} resultante de trasladar al vector $r_{xyz}(4,4,11)$ según la transformación **T(p)** con **p**(6,-3,8).

$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Matriz de transformación homogénea: Rotación (I)

- Supongamos que el sistema O'UVW sólo se encuentra rotado con respecto al sistema OXYZ. Las submatríz de rotación $\mathbf{R}_{3x3}$ será la que defina la rotación.
- Se pueden definir tres matrices homogéneas básicas de rotación según el eje sobre el que se realice dicha rotación.

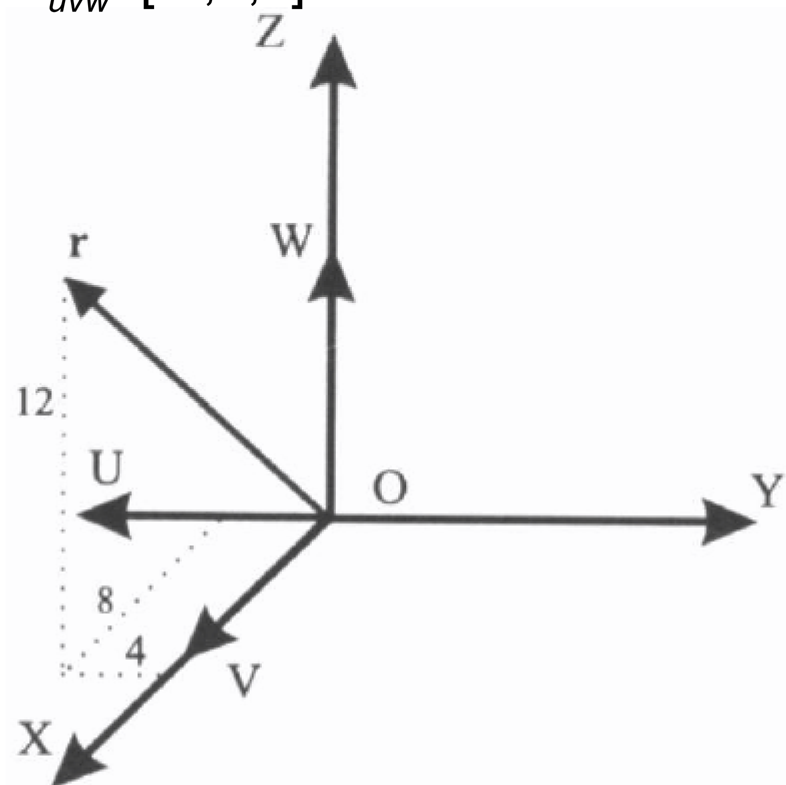
$$\mathbf{T}(\mathbf{x},\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}(\mathbf{y},\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{z},\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación homogénea: Rotación (II)

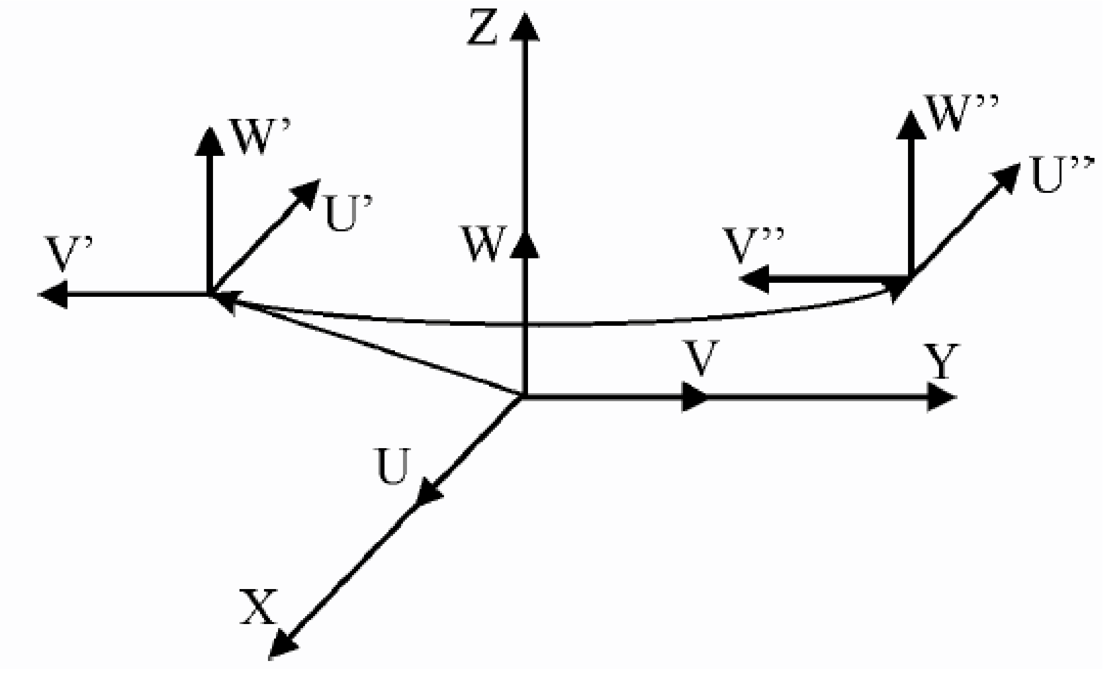
- Ejemplo 1.
  - Tenemos un sistema OUVW que se encuentra girado -90º alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{r}_{xyz}$ si $\mathbf{r}_{uvw}$=[-2,7,3]^{T}.

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Combinación de rotaciones y traslaciones (I)

- Es posible combinar rotaciones y traslaciones básicas multiplicando las matrices correspondientes.
- El producto **NO** es conmutativo:
  - Rotar y después trasladar ≠ Trasladar y después rotar.



Combinación de rotaciones y traslaciones (II)

- Rotación seguida de traslación:

$$\mathbf{T}((\mathbf{x},\alpha),\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & p_y \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

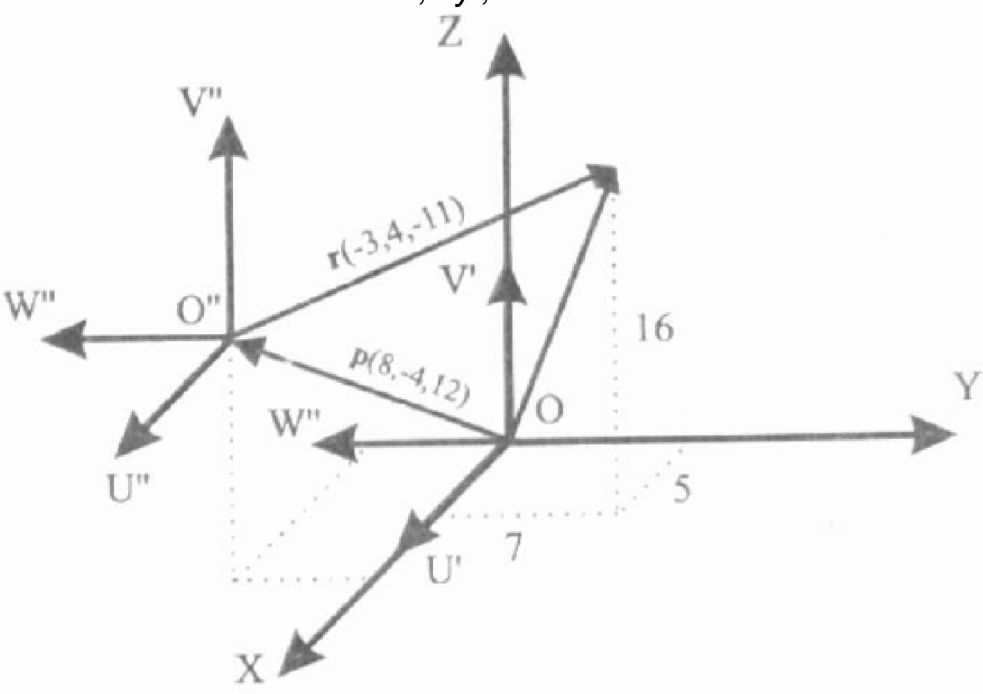
- Traslación seguida de rotación:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p},(\mathbf{x},\alpha)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & p_y\cos\alpha - p_z\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & p_y\sin\alpha + p_z\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Combinación de rotaciones y traslaciones (III)

- Ejemplo 1. Rotación seguida de traslación
  - Un sistema OUVW ha sido girado 90º alrededor del eje OX y posteriormente trasladado un vector **p**(8,-4,12) con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas (r_x, r_y, r_z) del vector **r** con coordenadas $\mathbf{r}_{uvw}$(-3,4,-11)

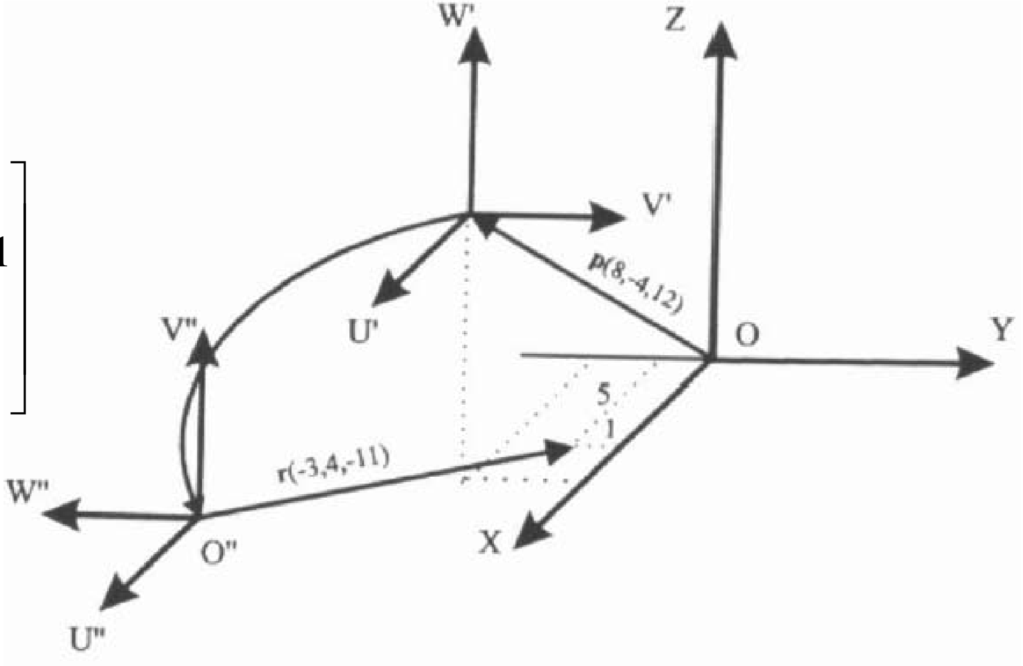
$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Combinación de rotaciones y traslaciones (IV)

- Ejemplo 2. Traslación seguida de rotación
  - Un sistema OUVW ha sido trasladado un vector **p**(8,-4,12) con respecto al sistema OXYZ y girado 90º alrededor del eje OX. Calcular las coordenadas (r_x, r_y, r_z) del vector **r** con coordenadas $\mathbf{r}_{uvw}$(-3,4,-11)

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Composición de matrices homogéneas (I)

- Una transformación compleja puede descomponerse en la aplicación consecutiva de transformaciones simples (giros básicos y traslaciones).
- Por ejemplo, una matriz que representa un giro de un ángulo α sobre OX, seguido de un giro Φ sobre OY y de un giro θ sobre OZ, puede obtenerse por la composición de las matrices básicas de rotación:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \mathbf{T}(\mathbf{z},\theta)\mathbf{T}(\mathbf{y},\phi)\mathbf{T}(\mathbf{x},\alpha) \\
&= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -C\alpha S\theta + S\phi C\theta S\alpha & S\alpha S\theta + S\phi C\theta C\alpha & 0 \\ C\phi S\theta & C\alpha C\theta + S\phi S\theta S\alpha & -S\alpha C\theta + S\phi S\theta C\alpha & 0 \\ -S\phi & C\phi S\alpha & C\alpha C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Composición de matrices homogéneas (II)

- Criterios de composición de matrices homogéneas
  - Si el sistema fijo OXYZ y el sistema transformado OUVW son coincidentes, la matriz homogénea de transformación será la matriz identidad 4x4, $\mathbf{I_4}$.
  - Si el sistema OUVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema fijo OXYZ, la matriz homogénea que representa cada transformación se deberá premultiplicar sobre las matrices de las transformaciones previas.
  - Si el sistema OUVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema móvil, la matriz homogénea que representa cada transformación se deberá postmultiplicar sobre las matrices de las transformaciones previas.

Composición de matrices homogéneas (III)

- Ejemplo 1. PREMULTIPLICACIÓN
  - Se quiere obtener la matriz de transformación que representa al sistema OUVW obtenido a partir del sistema fijo OXYZ mediante un giro de -90º alrededor del eje OX, de una traslación de vector $\mathbf{p}_{xyz}(5, 5, 10)$ y un giro de 90º sobre el eje OZ:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \mathbf{T}(\mathbf{z}, \mathbf{90^o})\mathbf{T}(\mathbf{p})\mathbf{T}(\mathbf{x}, -\mathbf{90^o}) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Composición de matrices homogéneas (IV)

- Ejemplo 2. POSTMULTIPLICACIÓN
  - Obtener la matriz de transformación que representa las siguientes transformaciones sobre un sistema OXYZ fijo de referencia: traslación de un vector $\mathbf{p}_{xyz}(-3,10,10)$; giro de -90º sobre el eje OU del sistema trasladado y giro de 90º sobre el eje OV del sistema girado:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \mathbf{T}(\mathbf{p})\mathbf{T}(\mathbf{u},-\mathbf{90^o})\mathbf{T}(\mathbf{v},\mathbf{90^o}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Inversa de una matriz homogénea

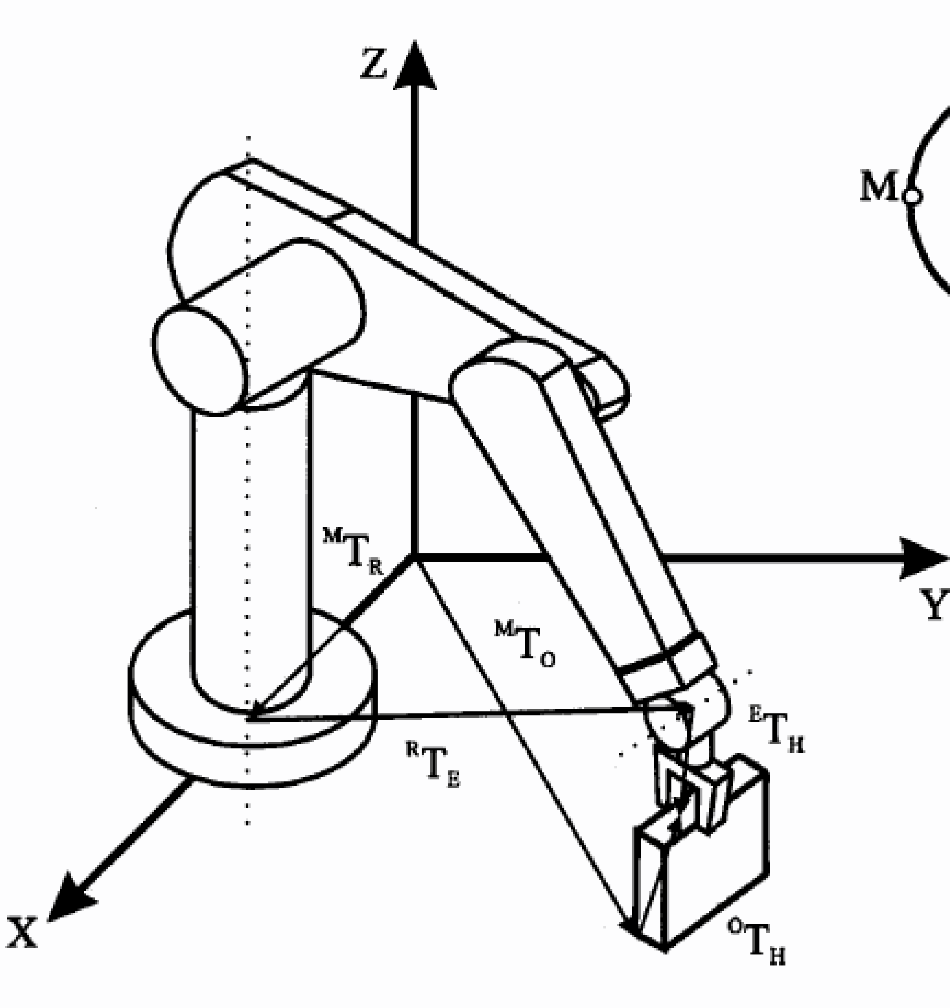
$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n}^\mathbf{T}\mathbf{p} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{o}^\mathbf{T}\mathbf{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{a}^\mathbf{T}\mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

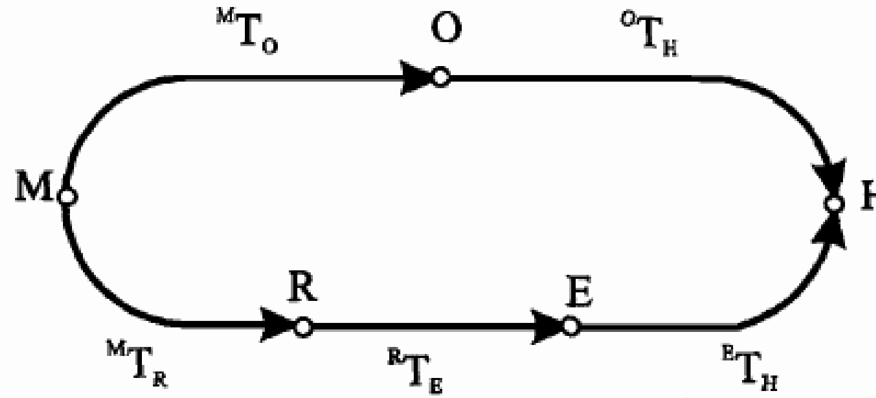
- Si se tiene la relación $\mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{T}\mathbf{r}_{uvw}$ y se multiplica en ambos miembros por $\mathbf{T}^{-1}$:

$$\mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{r}_{uvw}$$

por lo que teniendo en cuenta el significado geométrico de una matriz de transformación, se deduce que los vectores fila de la submatriz de rotación de la matriz T, representan los ejes principales del sistema de coordenadas de referencia OXYZ con respecto a OUVW.

Gráficos de transformación





$$^{M}\mathbf{T}_{R}\,{}^{R}\mathbf{T}_{E}\,{}^{E}\mathbf{T}_{H} = {}^{M}\mathbf{T}_{O}\,{}^{O}\mathbf{T}_{H}$$

$$\left({}^{M}\mathbf{T}_{O}\right)^{-1}\,{}^{M}\mathbf{T}_{R}\,{}^{R}\mathbf{T}_{E}\,{}^{E}\mathbf{T}_{H} = {}^{O}\mathbf{T}_{H}$$

$$^{R}\mathbf{T}_{O} = {}^{R}\mathbf{T}_{E}\,{}^{E}\mathbf{T}_{H}\;\left({}^{O}\mathbf{T}_{H}\right)^{-1}$$

$$^{R}\mathbf{T}_{O} = \left({}^{M}\mathbf{T}_{R}\right)^{-1}\;{}^{M}\mathbf{T}_{O}$$